



Anais do
61º Congresso Brasileiro do Concreto
CBC2019
Outubro / 2019
@ 2019 - IBRACON - ISSN 2175-8182



Flexão normal simples: vigas em concreto armado de seção genérica

Simple normal bending: beams in reinforced concrete of generic cross-section

Gustavo Rintzel Thomé

Engenheiro Civil, Autônomo

gustavorintzelthome@gmail.com

Resumo

O dimensionamento de seções retangulares e seções T sob flexão normal simples é a atividade diária mais comum aos engenheiros projetistas de estruturas de Concreto Armado (SANTOS, 1983 apud BASTOS 2015). Portanto, seções diferentes destas merecem atenção especial, haja vista que as equações de dimensionamento e diagnóstico são otimizadas para as vigas comuns. Este trabalho, apresenta um procedimento para a determinação do momento resistente destes elementos, baseado na discretização da seção transversal. Para esta determinação, adotou-se a divisão do concreto comprimido em 500 camadas, e para cada uma delas calcula-se a deformação, a tensão, a largura equivalente e a alavanca em relação ao centro de gravidade do aço tracionado. Ao final soma-se o produto das parcelas resultantes do concreto pelas suas alavancas correspondentes, gerando como dado de saída o momento resistente e a área de aço necessária para equilibrar a resultante do concreto. Foi desenvolvido um modelo em Excel para o cálculo, e ao longo do artigo apresenta-se os pontos chave do processo para que se entenda melhor o funcionamento do mecanismo concebido.

Palavra-Chave: Flexão normal simples, Vigas, Poligonal

Abstract

The design of rectangular sections and T sections under simple normal flexion is the daily activity most common to the engineers designers of Reinforced Concrete structures (SANTOS, 1983 apud BASTOS 2015). Therefore, different sections of these deserve special attention, given that the sizing and diagnostics equations are optimized for common beams. This work presents a procedure for the determination of the resistant moment of these elements, based on the discretization of the cross section. For this determination, the division of the compressed concrete into 500 layers was adopted, and for each one of them the deformation (domain diagrams), the stress, the equivalent width and the lever with respect to the center of gravity of the drawn steel. At the end the product of the resulting portions of the concrete is added by its corresponding levers, generating as output data the moment of strength and the area of steel needed to balance the resultant of the concrete. An Excel model was developed for the calculation, and throughout the article the key points of the process are presented to better understand the operation of the designed mechanism.

Keywords: Simple bending, Beams Polygonal



1 Introdução

A flexão simples é definida como a flexão sem força normal (BASTOS 2015), e é sobre este tema que este artigo se desenvolve. Neste trabalho apresenta-se uma metodologia para a determinação do momento fletor resistente de vigas em concreto armado de seção genérica, bem como a implementação da sequência de cálculo em planilha eletrônica.

O trabalho se desenvolveu através de pesquisa bibliográfica, sobretudo nos temas: concreto armado, geometria analítica, raciocínio lógico e programação em Excel. Após a pesquisa, implementou-se as equações concebidas/adaptadas para seções genéricas em planilha eletrônica para enfim realizar os testes de validação.

Com a ferramenta desenvolvida, é possível realizar diagnósticos mais precisos na determinação da capacidade resistente de vigas, além de ajudar em situações de projeto que envolvem geometrias não convencionais em projetos de concreto armado.

2 Desenvolvimento

2.1 Fundamentos básicos da flexão normal simples

Bastos (2015), sugere determinar o momento resistente o supondo a tensão no aço igual a de escoamento (haja vista a imposição de ductilidade apresentada pela nova norma, a qual considera a razão x/d menor ou igual a 0,45). Tendo a resultante no aço, iguala-se à do concreto (somatório das resultantes igual à zero). De posse da resultante no concreto, calcula-se a profundidade da linha neutra e conseqüentemente a alavanca entre as resultantes. O produto entre a alavanca e uma das resultantes será igual ao momento resistente da viga.

A equação para a determinação do momento resistente para seções retangulares é:

$$M_d = 0,80 \cdot 0,85 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,40 \cdot x) \quad (\text{Equação 1})$$

A principal diferença para as seções genéricas, é a largura da viga varia ao longo da altura da seção. Para adaptar a equação acima, a solução encontrada foi dividir a parcela de concreto comprimido em várias camadas, cada uma funcionando como uma seção retangular independente.

Conseqüentemente, cada parcela da seção contribui de maneira diferente na composição do momento resistente, sendo esta contribuição linearmente proporcional à distância do centro da camada ao centro de gravidade do aço tracionado (alavanca) e a largura equivalente de cada camada.

2.2 Discretização da parcela comprimida da seção transversal

Para a parcela do concreto comprimido compreendido entre o topo da viga até a profundidade da linha neutra, cada camada paralela possui características e dados distintos calculados como apresentar-se-á em seguida, mas antes é necessário compreender o que foi adotado como dados de entrada para então calcular as variáveis de cada caso.

- Altura total da viga: como o cálculo da alavanca entre cada camada ao centro de gravidade da armadura é feito utilizando-se o sistema de coordenadas em plano cartesiano, este dado é utilizado para saber “onde a viga começa”.
- Altura útil da viga: idem ao item anterior, com enfoque maior na alavanca entre as resultantes.
- Profundidade da linha neutra (relação x/d): indica onde as tensões na viga são nulas, sendo possível saber o quanto da seção está comprimida, além do cálculo da espessura de cada camada.
- Características mecânicas do concreto e do aço: a resistência característica à compressão (concreto) e a tração (aço) e seus respectivos coeficientes de segurança.
- Características geométricas do concreto (seção da viga): inserido em sistema de coordenadas cartesianas.
- Deformações limites (por padrão seguindo convenções da NBR 6118): apesar da normatização brasileira impor limites de deformações, este dado pode ser alterado para diferentes tipos de análises.

A Figura 1 expressa sucintamente o modelo adotado:

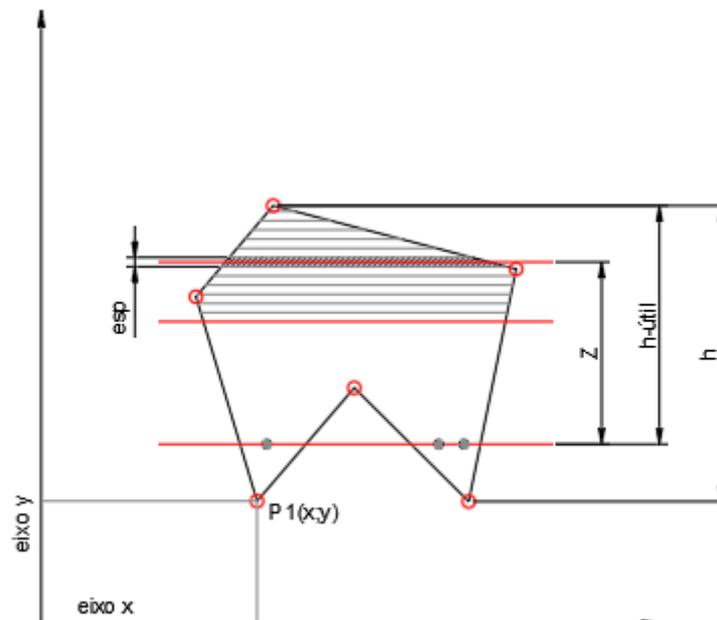


Figura 1 – Seção de concreto e sistema de coordenadas (Do Autor)

Entendido o funcionamento da discretização, o restante do cálculo baseia-se na Equação 1, porém com algumas adaptações gerando a Equação 2:

$$M_d = \Sigma[0,85 \cdot b_w \cdot (esp) \cdot f_{cd} \cdot (Z)] \quad (\text{Equação 2})$$

Principais mudanças entre as equações:

- O fator de arredondamento do diagrama retangular, não se faz mais necessário, haja vista que se adotou o diagrama parábola retângulo.
- A profundidade da linha neutra é substituída pela espessura da camada, que é igual a quingentésima parte da área comprimida da seção da viga.
- A alavanca é entendida como a distância vertical entre o centro de cada camada até o centro de gravidade do aço tracionado, e assim como a largura da base e a tensão atuante, varia de camada para camada.

Para exemplificar, a Figura 2 mostra trechos da planilha desenvolvida com a viga da Figura 1 inserida no sistema:

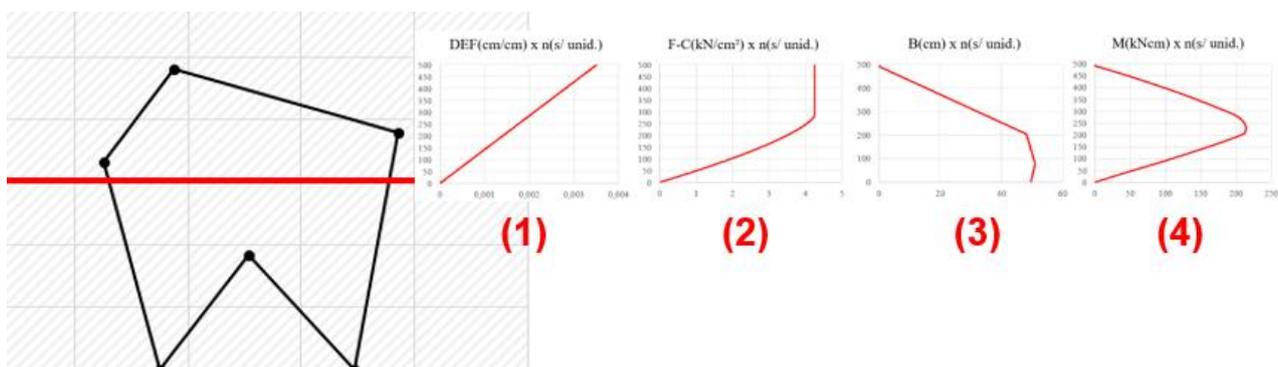


Figura 2 – Seção transversal e resultados gráficos (Do Autor)

Observando a figura, alguns fatos podem ser constatados:

- A deformação (gráfico 1) sempre apresentará comportamento linear, conforme a Hipótese de Bernoulli que é uma das premissas da flexão normal simples.
- O gráfico 2 mostra a resistência à compressão de cálculo do concreto, e está correlacionada à deformação do primeiro gráfico.
- A largura, gráfico 3, varia exclusivamente da geometria da viga.
- O gráfico 4 representa o “quanto de momento” cada parcela contribui para a viga, a área compreendida entre o eixo y e a linha vermelha é igual ao momento resistente expresso na Equação 2. As parcelas próximas à linha neutra apresentam pouca contribuição haja vista que a tensão atuante nelas é pequena quando comparadas ao restante das camadas.



2.3 Sequência de cálculo

A equação fundamental para a determinação do momento resistente é a expressa na Equação 2, mas sua simplicidade não demonstra todo processo envolvido. Para tornar mais transparente a metodologia, este capítulo demonstra o passo a passo de maneira mais detalhada.

- Determinação da espessura de cada camada: é uma variável constante em todas as camadas, igual à quingentésima parte da distância compreendida entre o topo da viga e a profundidade da linha neutra.
- Determinação da espessura de cada camada: utilizando a convenção de domínios da ABNT NBR 6118, deduz-se a deformação de cada camada por simples semelhança de triângulos, sendo a camada “0” com deformação nula, e a camada “500” com a máxima deformação. As intermediárias seguem e a proporcionalidade em progressão aritmética.
- Alavanca entre as resultantes: a distância entre o centro de gravidade do aço tracionado e o centro em y de cada camada é calculado utilizando a média aritmética entre a base e o topo de cada camada, ou seja, o meio. No sistema de coordenadas, por limitação da programação, a base da viga deve coincidir com o eixo x, de maneira a facilitar este passo.
- Largura da camada: este é o ponto que envolve mais complexidade. Baseado no sistema de coordenadas cartesianas, deduz-se a equação de uma reta em função de dois pontos (para implementação em Excel, utilizou-se o recurso da equação da reta por determinantes). Com a equação, é possível determinar a abcissa referente ao ponto médio de cada camada. Para cada camada, a largura é determinada por no mínimo duas abcissas, sendo a diferença delas igual à largura da viga naquele trecho.

Apresentando de outra forma: para cada dois pontos em sequência, determina-se uma equação, de onde encontra-se um terceiro ponto o qual seu valor em y é igual ao meio da camada e em x uma borda da viga.

Dentro deste processo, funções de lógica se fazem necessárias, como por exemplo, verificar se a camada em si está ou não entre os dois pontos da equação em questão.

No caso da camada interceptar mais de dois pontos, a largura é determinada pela diferença dos dois primeiros maiores mais a soma da diferença entre o terceiro maior e o quarto maior, assim sucessivamente conforme o exemplo apresentado na Figura 3:

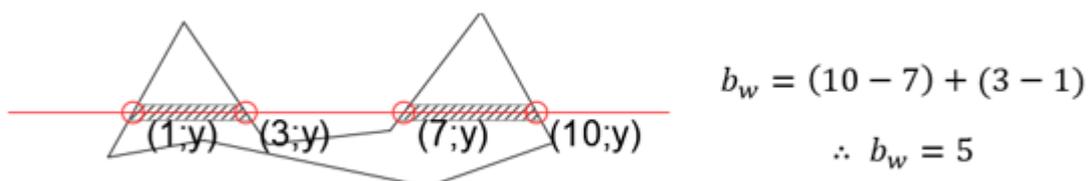


Figura 3 – Base da viga para casos com mais de uma borda (Do Autor)



2.4 Teste de validação e exemplo de cálculo

Para validar a planilha desenvolvida, será inserido os dados do exercício da apostila de Bastos (2015), Página 31, que é tradicionalmente resolvido seguindo a sequência:

Enunciado: Dada a seção retangular de uma viga, calcular qual é o momento fletor admissível (de serviço). São conhecidos:

b_w	20	cm
h	50	cm
d	46	cm
$\gamma_c = \gamma_f$	1,4	adimensional
f_{ck}	20	MPa
A_s	8	cm ²
f_{yk}	500	MPa
γ_s	1,15	adimensional

Tabela 1 – Dados do enunciado (Adaptado de Bastos (2015))

Resolução (resumida):

1º passo: determinar a resultante no aço	$R_{st} = \frac{A_s \cdot f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{8 \cdot 500}{1,15} = 347,82 \text{ kN}$
2º passo: calcular a profundidade da linha neutra:	$R_{cc} = 0,8 \cdot 0,85 \cdot b_w \cdot x \cdot f_{cd} \therefore 347,82 = 0,68 \cdot 20 \cdot x \cdot \left(\frac{20}{1,4}\right) \therefore x = 17,9 \text{ cm}$
3º passo: calcular o momento resistente:	$M_k = \frac{R_{cc} \cdot (d - 0,4 \cdot x)}{\gamma_c} = \frac{347,82 \cdot (46 - 0,4 \cdot 17,9)}{1,4} = 9649,5 \text{ kNcm}$
<p>R_{st}: força resultante no aço tracionado, em kN A_s: área de aço, em cm² f_{yk}: tensão de escoamento do aço, kN/cm² γ_s: coeficiente de segurança do aço, adimensional M_k: momento resistente característico, em kNcm R_{cc}: força resultante no concreto comprimido, em kN d: altura útil, em cm x: altura da linha neutra, em cm γ_c: coeficiente de segurança do concreto, adimensional R_{st}: força resultante no aço tracionado, em kN B_w: largura da viga, em cm f_{cd}: resistência à compressão de cálculo do concreto, em kN/cm²</p>	

Tabela 2 – Resolução do problema (Adaptado de Thomé & Sponholz (2018))



A Figura 4 apresenta os dados inseridos na planilha (as propriedades do aço e do concreto ficam em abas separadas, e foram suprimidas do exemplo, que visa focar no resultado final):

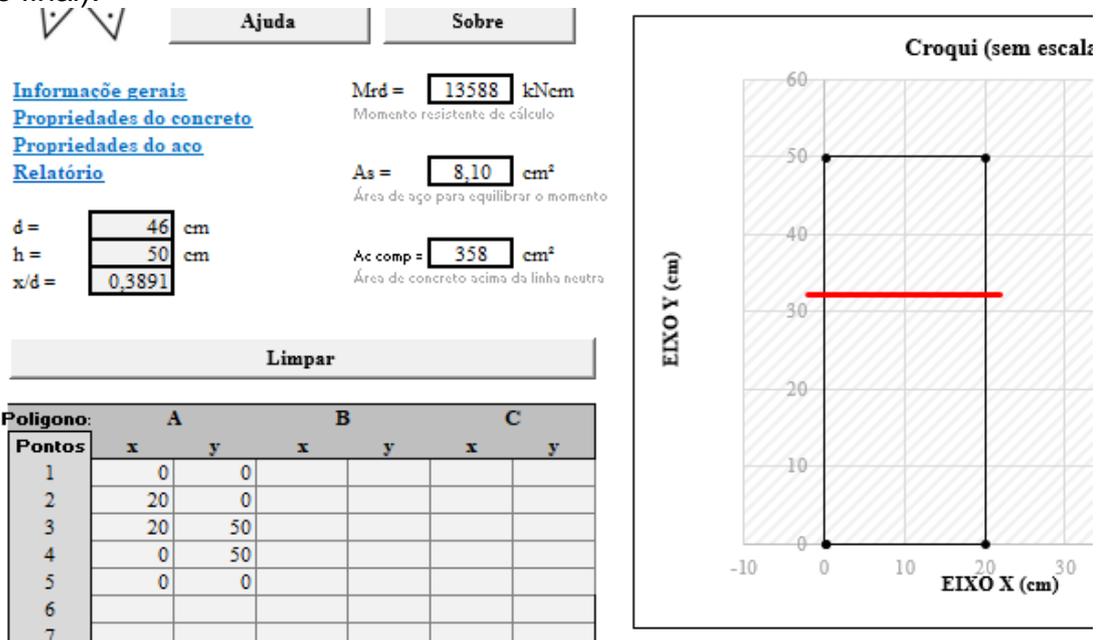


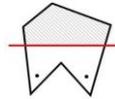
Figura 4 – Print resolução do problema com auxílio de planilha eletrônica (Do Autor)

Na figura, os dados de saída a serem comparados são a área de aço encontrada pelo programa e o momento resistente. A área de aço varia em 0,1 cm², e o momento característico ($13588 / 1,4 = 9705,46$ kNcm) varia em pouco mais de 1,00 kNcm.

A diferença entre os valores é aceitável, e pode ser causada pela dispensa do fator de arredondamento do diagrama parábola retângulo e/ou fatores inerentes à discretização. A planilha não faz seleção de bitolas de aço, portanto pode acontecer de surgir uma área de aço não factível. Para resolver esta questão, é possível implementar um sistema de iteração, fixando a área de aço e calculando uma nova altura da linha neutra de maneira a igualar as resultantes.

Dentre as limitações, pode-se ainda citar: análise exclusiva no Estado Limite Último, desconsideração da não simetria no eixo y, desconsideração de atenção especial em caso de vigas parede e tempo de processamento relativamente alto, decorrente da grande quantidade de células programadas, que nem sempre utilizadas.

Apesar das limitações, a ferramenta se mostra interessante pois possibilita uma alta gama de seções, como por exemplo a que se expõe na Figura 5, viga de ponte extraída da apostila “Concreto Protendido Pontes: Tabuleiro Celular”, do Prof. Eduardo C. S. Thomaz (página 4):



Mrd: VIGA DE SEÇÃO NÃO CONVENCIONAL © Gustavo R. Thomé
gustavorintzelhome@gmail.com

Ajuda

Sobre

[Informação gerais](#)
[Propriedades do concreto](#)
[Propriedades do aço](#)
[Relatório](#)

Mrd = kNcm
Momento resistente de cálculo

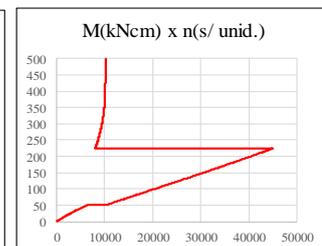
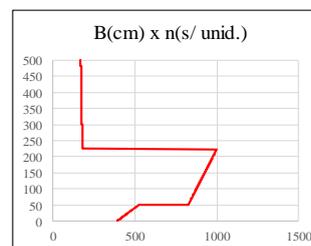
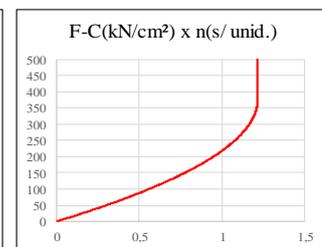
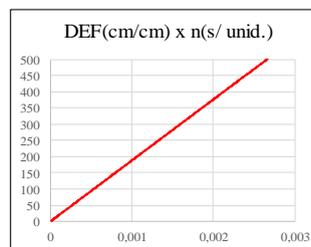
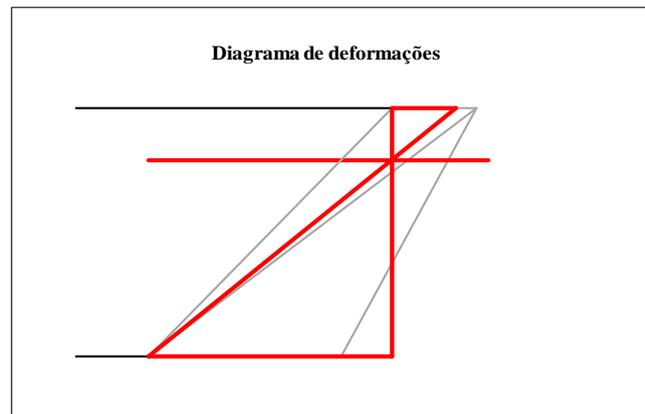
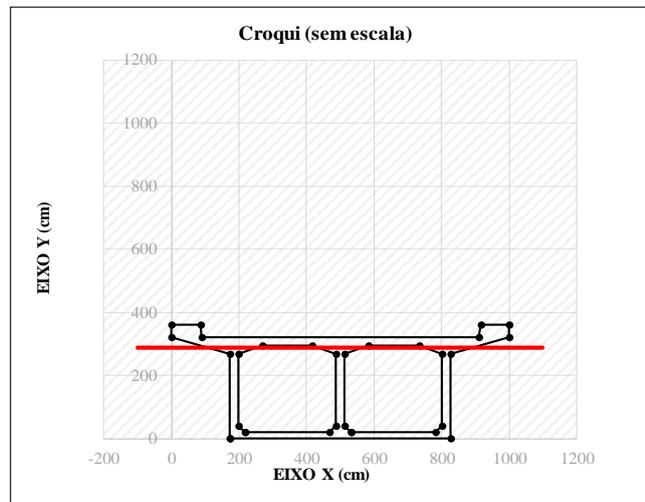
As = cm²
Área de aço para equilibrar o momento

d = cm
h = cm
x/d =

Ac comp = cm²
Área de concreto acima da linha neutra

Limpar

Polígonos	A		B		C	
	x	y	x	y	x	y
1	172,5	0	217,5	20	532,5	20
2	827,5	0	467,5	20	782,5	20
3	827,5	270	487,5	40	802,5	40
4	1000	320	487,5	270	802,5	270
5	1000	360	417,5	295	732,5	295
6	915	360	267,5	295	582,5	295
7	910	320	197,5	270	512,5	270
8	90	320	197,5	40	512,5	40
9	85	360	217,5	20	532,5	20
10	0	360				
11	0	320				
12	172,5	270				
13	172,5	0				
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
41						
42						
43						
44						
45						
46						
47						
48						
49						
50						



29/05/2019

Figura 5 – Print da planilha desenvolvida com viga de ponte inserida (Do Autor)

2.5 Breves noções de programação em Excel

Para este trabalho em específico, foi necessário adotar uma maneira de simular uma terceira dimensão em um plano de duas (linhas no eixo y e colunas no eixo x). Comumente insere-se uma fórmula em uma linha e arrasta para baixo e/ou para o lado, neste caso seria necessário arrastar para “fora da tela”. Para resolver este problema, transformou-se uma das variáveis em fixa (no caso o eixo z), e repetiu-se a estrutura alterando os valores de “z” de maneira a simular sua variação. A Figura 6 exemplifica este pensamento:

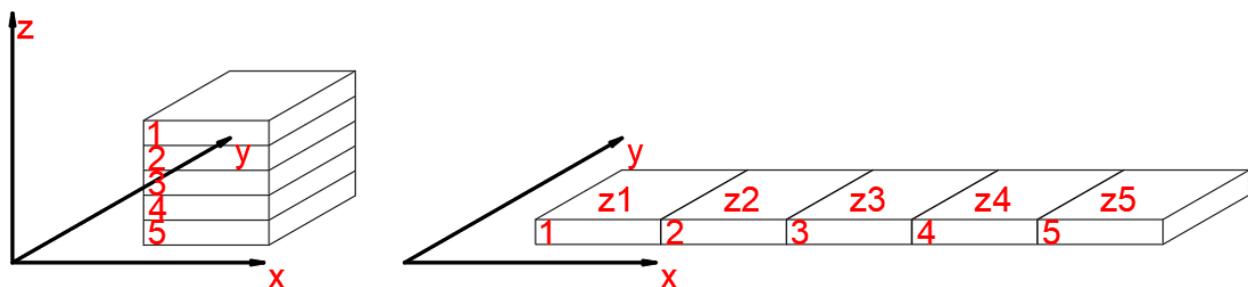


Figura 6 – Conversão de 3 dimensões para 2 (Do Autor)

A título de curiosidade, no trabalho desenvolvido, o eixo y representa cada uma das 500 camadas, o eixo x, as propriedades da cada uma, bem como parâmetros “a” e “b” para a determinação da equação da reta entre outros dados. O eixo z representa esse conjunto de dados do eixo x mas para cada uma das 150 equações possíveis. Ao final do trabalho mais de 700.000 células foram programadas.

3 Conclusão

Apesar das limitações apresentadas neste artigo, a ferramenta desenvolvida pode ser utilizada de maneira anexa a outros sistemas, por exemplo, em projetos com a armadura dupla, e protensão, potencializando sua utilidade.

Em questões de diagnóstico de estruturas existentes, é possível simular danos na seção, como por exemplo a diminuição da área de concreto causada por diversos motivos, seja uma falha na concretagem ou um tubo mal posicionado.

Como continuidade deste trabalho e sugestão para abordagens futuras, pode-se citar: inclusão da análise da seção oblíqua (girando a seção em torno de um ponto fixo), inclusão de mais de um tipo de material para o concreto e/ou aço (simulando projetos de reforço estrutural) e a possibilidade de incluir no esforço resistente as solicitações de força normal e tração.



Anais do
61º Congresso Brasileiro do Concreto
CBC2019
Outubro / 2019



@ 2019 - IBRACON - ISSN 2175-8182

3 Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BASTOS, P. S. S. **Flexão normal simples – vigas**. Notas de aula da disciplina de Estruturas de concreto I. Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2015. 78p.

THOMAZ, E. C. S. E. **Concreto Protendido Pontes: Tabuleiro Celular**. Notas de aula. Instituto Militar de Engenharia, 42p.

THOMÉ, G. R., SPONHOLZ, I. Determinação do momento resistente de uma viga em concreto armado: procedimento e automatização em planilha eletrônica, **Anais do Congresso Brasileiro de Patologia das Construções**. Campo Grande, ALCONPAT, 2018.